Einführung in die Grundbegriffe

Teil 3

Die Verknüpfung von Ereignissen durch

nicht
und
oder
entweder oder
weder noch

in Zusammenhang mit der Mengenlehre

Mengenbilder

Venn-Diagramme
Vierfelder-Tafeln

Datei Nr. 31103

Stand 20. Januar 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort
Wichtige Hinweise zur Schreibweise von Ereignissen

Das Ziehen von Karten aus einem Stapel, das mehrfache Würfeln nacheinander, oder das Ermitteln von Buchstaben nacheinander, aus denen man dann ein Wort bildet usw. sind mehrstufige Experimente. Weil es dabei auf die Reihenfolge der einzelnen „Ziehungen" ankommt, muss man auch durch die Schreibweise ausdrücken, dass die Reihenfolge durch das Ziehen festgelegt und nicht verändert werden darf. Dazu gibt es verschiedene Schreibweisen.

Die gebräuchlichste sind die geordneten Paare, Tripel usw.

a) Man zieht aus einem Kartenstapel der Reine nach Karten mit den Farben rot, schwarz, rot. Dann drückt man dieses Ergebnis durch das Tripel (r,s,r) aus. Günstiger sind meist die Schreibweisen $(r;s;r)$ oder $(r\,|\,s\,|\,r)$, vor allem dann wenn man statt Buchstaben Zahlen hat, um nicht das Dezimalkomma zu verwechseln. Man kann aber auch – wenn keine Verwechselungsgefahr besteht die Buchstaben zu einem Wort aneinanderfügen und dieses Ziehungsergebnis durch rsr ausdrücken.

Falsch sind jedoch die Schreibweisen $\{r,s,r\}$ oder $\{r;s;r\}$, denn sie stellen eine Menge mit drei Elementen dar, und in ihr darf man die Elemente vertauschen und muss sogar doppelte weglassen. Somit gilt hier $\{r,s,r\}=\{r,r,s\}=\{s,r,r\}=\{r,s\}=\{s,r\}$.

b) Beispiel 1: Aus einem Stapel mit 6 Karten, auf denen die Buchstaben A,B,E,M,U,S aufgedruckt sind, werden 4 Karten zufällig entnommen und nach jedem Zug wieder zurückgelegt. Man notiert die gezogenen Buchstaben und bildet daraus ein Wort.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei dreimaligem Ziehen von 4 Karten dieses Ereignis: $E=\{\text{maus}, \text{saum}, \text{mumm}\}$?
Hier bewährt sich die abkürzende Schreibweise gegenüber der gebräuchlichsten Form:
$E=\{(m;a;u;s),(s;a;u;m),(m;u;m;m)\}$
Man darf nur nicht das Ziehungsergebnis „saum" in der Form $\{s;a;u;m\}$ als Menge schreiben, dann ist die Reihenfolge der Ziehungen nicht mehr festgelegt, denn es gilt ja:
$\{s;a;u;m\}=\{m;a;u;s\}=\{a;u;m;s\}=\ldots$

c) Beispiel 2: Aus drei Würfelergebnissen kann man jeweils eine dreistellige Zahl bilden:
$A=\{115;666;254;515;246\}$. Dies war ein Ergebnis von fünf Dreierwürfen.
Hier wird auch klar, dass in $\{2,3;4\}$ nur zwei Ergebnisse stehen, nämlich die Zahl 2,3 und die Zahl 4!

Friedrich Buckel im November 2009 – neu gefasst im Dezember 2018

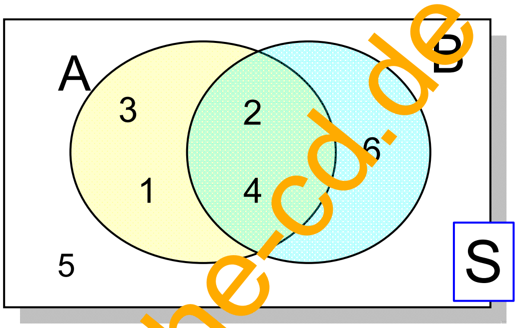
Inhalt

Der Text 31104 enthält viele Aufgaben und Beispiel zum Inhalt dieses Textes.

§ 1 Was hat Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Mengenlehre zu tun?

Antwort: Zu jedem Ereignis gehört eine Menge von (möglichen) Ergebnissen.
Wir besprechen dazu zwei Arten von Mengenbilder: Venn-Diagramme und Vierfeldertafeln

1.1 Mengenbilder: Venn-Diagramme



Das **Experiment** „Werfen eines idealen Würfels“ hat die Ergebnismenge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Jedes **Ereignis**, das dabei eintreten kann, hat **Ergebnisse** aus dieser Menge S, kann also als Teilmenge von S angesehen werden.

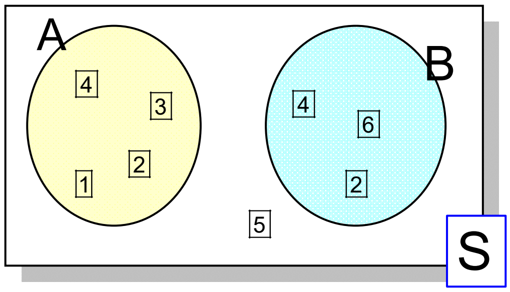
Beispiel für Ereignisse:

A: Man würfelt eine Zahl kleiner als 5. In der Mengendarstellung: $A = \{1,2,3,4\}$.

B: Man würfelt eine gerade Zahl. In der Mengendarstellung: $B = \{2,4,6\}$.

Stellt man Mengen durch (überlappende) Ovale darstellen, hat man ein **Venn-Diagramm**.
Die Ergebnismenge S ist sozusagen die Grundmenge, die man als Rechteck zeichnet. Darin werden die beiden Ereignismengen als überlappende Ovale dargestellt.

ACHTUNG: Nebenstehendes Mengenbild ist falsch.



Die Zahlen 2 und 4 treten doppelt auf. So hätte die Menge S acht Elemente, denn 2 und 4 kommen doppelt vor.

Das ist nicht gestattet. Man schreibt die zu A und zu B gehörenden Elemente in den überlappenden Bereich,
Die 5 gehört nicht zu A und nicht zu B, also weder zu A noch zu B, daher steht sie im Außenbereich.

MERKE: In einem VENN-DIAGRAMM werden alle Elemente nur einmal angeschrieben. Wenn Teilmengen der Grundmenge gemeinsame Elemente haben, muss man die Ovale für sie überlappend darstellen.

Aufgabe 1

Ein idealer Würfel wird einmal geworfen. Stelle die Ereignisse C und D in einem Venn-Diagramm dar.

C: „Die gewürfelte Zahl ist ein Teiler von 12“

D: „Man würfelt eine ungerade Zahl“.

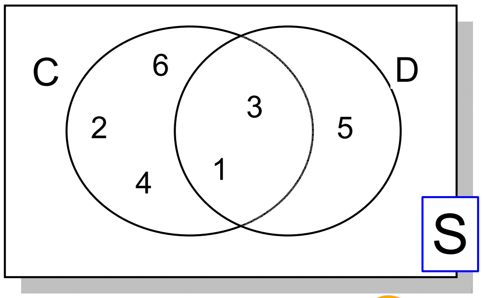
Lösung 1

C: „Die gewürfelte Zahl ist ein Teiler von 12“:

d. h. $C = \{1,2,3,4,6\}$

D: „Man würfelt eine ungerade Zahl“:

d. h. $D = \{1, 3, 5\}$



1.2 Verneinung einer Aussage

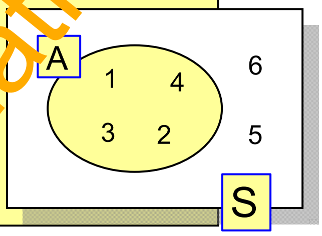
Unser Würfelexperiment hat die Ergebnismenge $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Das Ereignis A: „Man würfelt eine Zahl keiner als 5“ hat die Ergebnismenge $A = \{1,2,3,4\}$.

Verneint man eine Aussage, dann wird aus A die Aussage „nicht A“, in Worten: „Man würfelt keine Zahl kleiner als 5“.

Die zugehörige Ergebnismenge ist die **Restmenge** von A, oder auch **Komplementärmenge** von A, und bezeichnet sie mit $\bar{A}$.

Man erhält die Komplementärmenge als Differenzmenge der Ergebnismenge S zu Ereignismenge A: $\bar{A} = S \setminus A$ und liest das „S ohne A“.



Beispiele:

A:	Man würfelt eine Zahl kleiner als 5	$A = \{1,2,3,4\}$	$\bar{A}$:	Man würfelt keine Zahl kleiner als 5 (sondern eine die mindestens 5 ist)	$\bar{A} = \{5,6\}$
B:	Man würfelt eine gerade Zahl	$B = \{2,4,6\}$	$\bar{B}$:	Man würfelt keine gerade Zahl (also eine ungerade Zahl)	$\bar{B} = \{1,3,5\}$
C:	Man würfelt einen Teiler von 12	$C = \{1,2,3,4,6\}$	$\bar{C}$:	Man würfelt keinen Teiler von 12	$\bar{C} = \{5\}$
D:	Man würfelt eine ungerade Zahl	$D = \{1,3,5\}$	$\bar{D}$:	Man würfelt keine ungerade Zahl (also eine gerade Zahl)	$\bar{D} = \{2,4,6\}$

Wenn man **zweimal verneint**, hat man wieder die ursprüngliche Aussage.

Das sieht man am Beispiel $B = \{2,4,6\}$:

Verneinung ergibt die Komplementärmenge $\bar{B} = \{1,3,5\}$.

Verneint man nochmals, erhält man $\bar{\bar{B}} = \{2,4,6\} = B$.

Zum **sicheren Ereignis S** gehört die gesamte Ergebnismenge.

Beispiel: Das Ereignis „Es wird eine Zahl kleiner als 10 gewürfelt“ ist das sichere Ereignis $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Die Verneinung davon heißt: Es wird eine Zahl gewürfelt, die mindestens 10 ist.

Das zugehörige Ereignis ist das unmögliche Ereignis: $\bar{S} = \{\ \}$.

Umgekehrt ist das Gegenereignis zum unmöglichen Ereignis das sichere Ereignis: $\overline{\{\ \}} = S$.

1.3 Verknüpfung von Aussagen:

Wir hatten zuvor die Ereignisse A und B so definiert:

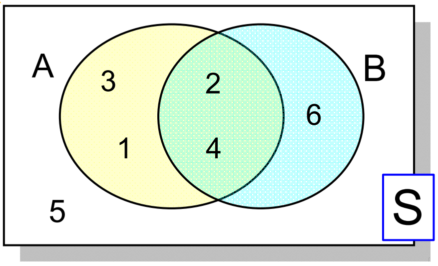
A : Man würfelt eine Zahl kleiner als 5. Ergebnismenge: $A = \{1,2,3,4\}$.

B: Man würfelt eine gerade Zahl. Ergebnismenge: $B = \{2,4,6\}$.

Man kann zwei Aussagen (bzw. Ereignisse) auf verschiede Arten zu neuen Aussagen (Ereignissen) verknüpfen. Ich zähle auf die wichtigsten fünf Verknüpfungen auf.

V1:	A und B:	Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 5 und gerade.
V2;	A oder B:	Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 5 oder gerade.
V3:	A und nicht B:	Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 5 und nicht gerade.
V4:	Entweder A oder B:	Die gewürfelte Zahl ist entweder kleiner als 5 oder gerade.
V5:	Weder A noch B:	Die gewürfelte Zahl ist weder kleiner als 5 noch gerade.

Das Venn-Diagramm, das A, B und S gemeinsam enthält, zeigt:



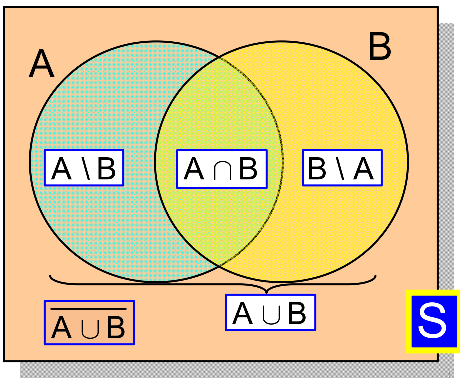
V1 Die Zahlen 2 und 4 gehören zu A und zu B.
Sie bilden die **Schnittmenge** $A \cap B = \{2, 4\}$

V2 Die Zahlen der Menge $\{1,2,3,4,6\}$
gehören zu A oder zu B.
Sie bilden die **Vereinigungsmenge** $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

V3 Die Zahlen 1 und 3 gehören zu A und nicht zu B. Sie bilden die **Differenzmenge**
$A \setminus B = \{1, 3\}$ (gelesen: A ohne B).
Ferner gibt es die **Differenzmenge** $B \setminus A = \{6\}$, denn die 6 gehört zu B und nicht zu A.

V4 Die Zahlen 1, 3 und 6 gehören entweder zu A oder zu B: Diese Menge heißt **symmetrische Differenz** und wird so geschrieben: $A \Delta B = \{1, 3, 6\}$ (lies: A Delta B).

V5: Die Zahl 5 gehört weder zu A noch zu B. Die Ergebnismenge ist die Restmenge (Komplementärmenge) der Vereinigungsmenge: $\overline{A \cup B} = 5$ oder $S \setminus (A \cup B)$
Hier meint man die Elemente, die nicht zu A oder zu B gehören.



Aufgabe 2:

Bestimme zu den Ereignissen (Mengen) C und D der Aufgabe 1 die hier genannten fünf Verknüpfungsmengen und beschreibe die Ereignisse verbal.